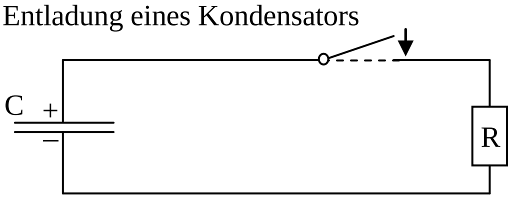
RC-Kreise

Schaltkreise mit Widerstand und Kondensator

Entladung eines Kondensators



Was passiert, wenn der Schalter geschlossen wird? Fließender Strom I?

$I_0 = U_0 / R = Q_0 / RC$ da $C = \frac{Q}{U}$ und $U = \frac{Q}{C}$ U sinkt ab, da Q abnimmt.

I_0, U_0, Q_0 : Startwerte bei t = 0, der Zeitpunkt an dem der Schalter geschlossen wird.

Allgemein:

(1) $I = \frac{Q}{RC}$ wobei I und Q zeitabhängig sind!?

Wir wissen auch: Strom = fließende Ladung pro Zeit

$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ → Momentan Wert: (2) $I = \frac{dQ}{dt}$ Ableitung der Ladung nach der Zeit (Differential)

$\frac{dQ}{dt} =$ Änderungsgeschwindigkeit der Ladungsmenge

Einsetzen von (2) in (1)

$\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{RC} \mid * \frac{dt}{Q}$ Differentialgleichung

$\frac{dQ}{Q} = \frac{dt}{RC}$

Integration: $\int \frac{1}{Q} * dQ = \frac{1}{RC} \int dt$

Mit den Integrationsregeln: $\ln(Q) = \frac{-1}{RC} + t + A$ (A: Integrationskonstante)

Hinweis: ln(x) = Logarithmus naturalis, es gilt $e^{\ln(x)} = x$ und $\ln(e^x) = x$

=> $Q = e^{\ln(Q)} = e^{-\frac{t}{RC}} * e^A$

$Q = \underbrace{e^A} * e^{-\frac{t}{RC}}$

→ Um den Vorfaktor e^A zu verstehen, betrachten wir den Startzeitpunkt t = 0

$Q(t=0) = e^A * \underbrace{e^{-\frac{0}{RC}}}_{\to 1}$

$Q(t=0) = Q_0 = e^A$ einsetzen: $Q(t) = Q_0 * e^{-\frac{t}{RC}}$

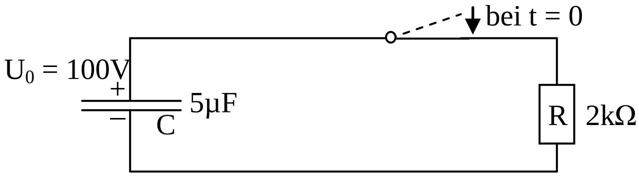
Zum Exponenten:

$[RC] = \Omega * F = \frac{V}{A} * \frac{As}{V} = s$

RC = τ „Tau“ = Zeitkonstante

τ > Kondensator entlädt sich langsam

τ < Kondensator entlädt sich schnell



Zeitkonstante: RC = τ = $2000\Omega * 5 * 10^{-6}F = 10^{-2}s = 10ms = 0{,}01s$

Anfangsladung $Q_0 = C * U_0 = 5\mu F * 100V = 5 * 10^{-6}\frac{As}{V} * 100V = 5 * 10^{-4}As = 500\mu C$

Q für verschiedene Zeitpunkte → $Q(t) = Q_0 * e^{-\frac{t}{RC}} = Q_0 * e^{-\frac{t}{\tau}}$

Anfangsstrom $I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{100V}{2k\Omega} = 50mA$

Zeit t	$-\frac{t}{\tau}$	$e^{-\frac{t}{\tau}}$	Q(t)	U
0	0	1	500µC	100V
10ms	-1	0,368	187µC	36,8V
20ms	-2	0,135	67,7µC	13,5V
30ms	-3	0,0498	24,8µC	4,98V

Wie verläuft U?

$U = \frac{Q(t)}{C}$, $U = \frac{1}{C} * Q_0 * e^{-\frac{t}{RC}}$ wobei $\frac{Q_0}{C} = U_0$ ist

Was ist mit I?

$$I = \frac{dQ}{dt} = \underbrace{Q_0 * \left(-\frac{1}{RC}\right)}_{I_0} * e^{-\frac{t}{RC}}$$

$I = I_0 * e^{-\frac{t}{RC}}$

Zusatzfrage: (zum Beispiel)

Nach welcher Zeit ist die Spannung auf 20% abgesunken? Wie groß ist die Stromstärke zu diesem Zeitpunkt?

$U = U_0 * e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 * e^{-\frac{t}{\tau}} \mid : U_0$

$\frac{U}{U_0} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \mid \ln()$

$\ln(\frac{U}{U_0}) = \ln(e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \mid * (-\tau)$

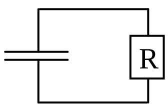
$-\tau * \ln\left(\frac{U}{U_0}\right) = t$

$t = -10ms * \ln(0{,}2) = -10ms * (-1{,}609) = 16{,}09ms$

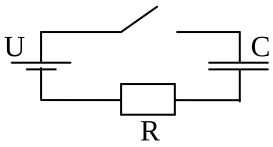
$I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{Q_0}{RC} = \frac{500\mu C}{10ms} = 50 * 10^{-3}\frac{As}{s} = 50mA$

Nach t = 16,09s ist $e^{-\frac{t}{\tau}} = 0{,}2$ und $I = I_0 * e^{-\frac{t}{\tau}} = 50mA * 0{,}2 = 10mA$

Alternativ:



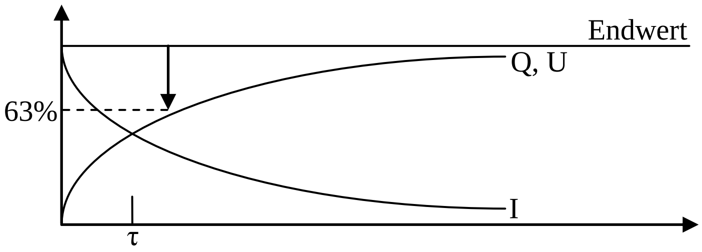
$I = \frac{U}{R}$ $\quad$ $\frac{I}{I_0} = \frac{\frac{U}{R}}{\frac{U_0}{R}} = \frac{U*R}{U_0*R} = \frac{U}{U_0} = 0{,}2$



Q $= Q_e * (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

U $= U_e * (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

I $= I_0 * e^{-\frac{t}{RC}}$



Eckwerte:

- t = τ : $e^{-\frac{t}{\tau}} = 0{,}368$ ≈ 37%
- t = 2τ : $e^{-\frac{t}{\tau}} = 0{,}135$ ≈ 13,5%
- t = 3τ : $e^{-\frac{t}{\tau}} = 0{,}0498$ ≈ 5%