

Endliche Menge M

Zu zeigen: Anzahl der Teilmengen ist $2^{|M|}$

Beispiel: $M = \{a, b, c\}$ $|M| = 3$

$2^{|M|} = 2^3 = 8$ 8 Teilmengen

Potenzmenge ist Menge der Teilmengen.

$P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, M\}$ anders Formuliert: $|P(M)| = 2^{|M|}$ A(n)

Beweis mit vollständiger Induktion nach $n = |M|$

1. Induktionsbasis

Zu zeigen: Für M mit $|M| = 0$ ist $P(M) = 2^0$ A(0)

Beweis: $M = \emptyset, P(M) = \{\emptyset\} \Rightarrow |P(M)| = 1 = 2^0$

2. Induktionsschritt

Zu zeigen: Für M mit $|M| = k$ ist $|P(M)| = 2^k \Rightarrow$ Für M mit $|M| = k + 1$ ist $|P(M)| = 2^{k+1}$

Induktionsvoraussetzung A(k)

Beweis: Sei M eine Menge mit $|M| = k + 1$

Wählen ein beliebiges Element $a \in M$

Sei $M' = M \setminus \{a\} \Rightarrow |M'| = k$

$\Rightarrow |P(M')| = 2^k$ (nach Induktionsvoraussetzung)

$P(M') = \{T_1, T_2, \dots, T_2^k\}$

$P(M) = P(M') \cup \{T_1 \cup \{a\}, T_2 \cup \{a\}, \dots, T_2^k \cup \{a\}\}$

$\Rightarrow |P(M)| = 2^k + 2^k = 2 * 2^k = 2^{k+1}$

Unter den Teilmengen T_1, \dots, T_2^k ist die leere Menge sowie M' . Also sind unter $T_i \cup \{a\}$ auch $\emptyset \cup \{a\} = \{a\}$ sowie $M' \cup \{a\} = M$

Damit ist der Induktionsschritt fertig.

Aus Induktionsbasis und Induktionsschritt folgt die Behauptung.

Konkretes Beispiel zur Beweisidee:

$M = \{a, b, c\}$ $P(M') = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$

$M' = \{b, c\}$ $P(M) = P(M') \cup \underbrace{\{\emptyset \cup \{a\}\}}_{= \{a\}}, \underbrace{\{\{b\} \cup \{a\}\}, \{\{c\} \cup \{a\}\}, \{\{b, c\} \cup \{a\}\}}_{= M}$

$|P(M)| = 2^2 + 2^2 = 2 * 2^2 = 2^3 = 8$

Falsches Beispiel:

Behauptung: Alle Pferde haben dieselbe Farbe.

Falscher Beweis mit vollständiger Induktion

1. Induktionsbasis

$n = 1$ Pferd. Nur eine Farbe, also gilt die Behauptung.

2. Induktionsschritt

Induktionsvoraussetzung: k Pferde haben stets dieselbe Farbe \Rightarrow $k+1$ Pferd haben stets dieselbe Farbe

Zu zeigen: Sei M eine Menge von $k+1$ Pferden

Nehmen aus M Pferd a heraus $M' = M \setminus \{a\} \Rightarrow$ In M' haben alle Pferde dieselbe Farbe *

Nehmen Pferd b aus M heraus $M'' = M \setminus \{b\} \Rightarrow$ In M'' haben alle Pferde dieselbe Farbe

\Rightarrow Nach * b hat dieselbe Farbe wie alle anderen Pferde.

Fehler: Betrachten Sie die Menge M mit $|M| = 2$