** | | * | … | * | * |
1 2 3 32 33 34

Zeichenkette aus <u>38</u> Symbolen

$\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ … $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$ $\underline{\quad}$
1. 2. 3. … 36. 37. 38.

Verteilung der * : $\binom{38}{5}$ Möglichkeiten

Verteilung der | : $\binom{38}{33}$ Möglichkeiten

Satz: c*(n, k) = $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$

Beweis: Mit n-1 „|" und k „*"

Beispiel: Festplatten

100 Platten aus 3 Typen, mit Wiederholung, ohne Reihenfolge

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{3+100-1}{100} = \binom{102}{100} = \frac{102!}{(102-100)!*100!} = \frac{101*102}{1*2} = 5151$$

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{3+100-1}{2} = \binom{102}{2} = \frac{102*101}{1*2} = 51*101 = 5151$$

Anmerkung:

a) Festplatten: $p_1 + p_2 + p_3 = 100$ p_i = Anzahl Platten vom Typ i
b) Freikarten: $p_1 + p_2 + \ldots + p_{34} = 5$ p_i = Anzahl Karten, die Person i bekommt
c) Allgemein: c*(n, k) = Anzahl möglicher Summen mit $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = k$

Zusammenfassung: Aus n Objekten werden k ausgewählt

	Mit Reihenfolge (Variation)	Ohne Reihenfolge (Kombination)
Ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
Mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Eigenschaften von Binomialkoeffizienten

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!*k!}$

$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!} = 1$

$\binom{n}{n} = 1$

$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$

$\binom{n}{n-1} = n$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Pascalsches Dreieck

(1)
(1) (1)
(1) (2) (1)
(1) (3) (3) (1)
(1) (4) (6) (4) (1)

Binomische Formeln

z.B. $(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k$

=> (Beweis z.B. mit vollständiger Induktion

Satz: Eine Menge von n Elementen hat 2^n Teilmengen

Beweis: $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen. (k auf n, ohne Reihenfolge, ohne Wiederholung)

Insgesamt: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n$

Binomische Formel

Relationen (Grundbegriffe, Darstellungen, Mengenoperationen)

Beispiel: In einer Datenbank stehen Listen mit Namen, Adressen, Tel. Nummern usw.

Wie kann man solche Tabellen sowie Operationen mit ihnen konzeptionell beschreiben?

Eine Möglichkeit: Relationen

Definition: Relation auf Menge M: Teilmenge von $M \times M$, $R \subseteq M \times M$

$(x, y) \in R$: „x steht in Relation zu y“

Beispiel: $M = \{a, b, c, d\}$

$R_1 = \{(a, c), (b, a), (b, b), (c, a), (c, d)\}$

$R_2 = \{(a, a), (c, c)\}$

Beispiel: $M = \{1, 2, 3\}$ wobei $(x, y) \in R \Leftrightarrow x < y$

$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

Beispiel: $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wobei $(x, y) \in R \Leftrightarrow x < y \Rightarrow |R| = \infty$

Beispiel: M = {Person}

$R \subseteq M \times M$, $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ „x liebt y“, z.B. (Rick, Ilsa) $\subset R$