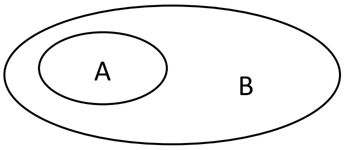
Definition: Mächtigkeit von M

$$|M| = \begin{cases} \text{Anzahl Elemente, falls } M \text{ endlich} \\ \infty \text{, falls } M \text{ unendlich} \end{cases}$$

Beispiel: $|\{a, b, c\}| = 3$, $\mathbb{N} = \infty$

Beispiel: $A \subseteq B$

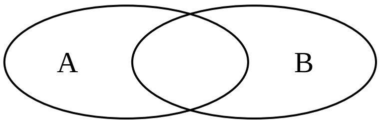


1. $|B| < \infty$ daraus folgt $|A| < \infty$
2. $|A| = \infty$ daraus folgt $|B| = \infty$

! Andersrum nicht !

Satz: Seien A, B endlich.

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



Elemente in der Schnittmenge sind sowohl in A als auch in B enthalten, daher muss die Schnittmenge einmal subtrahiert werden!

Definition: A, B beliebige Mengen.

Kartesisches Produkt

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Geordnetes Paar, Reihenfolge wichtig!

$A = \emptyset$ oder $B = \emptyset \rightarrow A \times B = \emptyset$

Schreiben: $A \times A = A^2$

Beispiel: $A = \{p, q\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

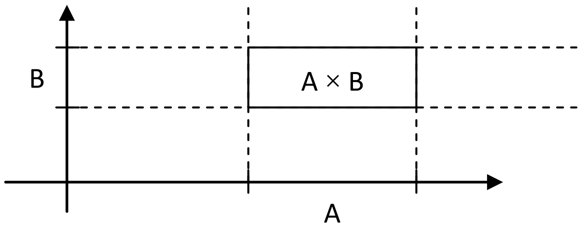
$A \times B = \{(p, 1), (p, 2), (p, 3), (q, 1), (q, 2), (q, 3)\}$

$B \times A = \{(1, p), (2, p), (3, p), (1, q), (2, q), (3, q)\}$

$\quad = \{(1, p), (1, q), (2, p), (2, q), (3, p), (3, q)\}$

$|A \times B| = |A| * |B| = 2 * 3 = 6$

Beispiel:



Beispiel: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Allgemein: $A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{\text{n-mal}}$

$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(\underbrace{a_1, \ldots, a_n}_{\text{n-Tupel}}) \mid a_i \in A_i\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$

Warnung vor „extremer“ Verwendung der Mengenlehre: Russellsche Antinomie

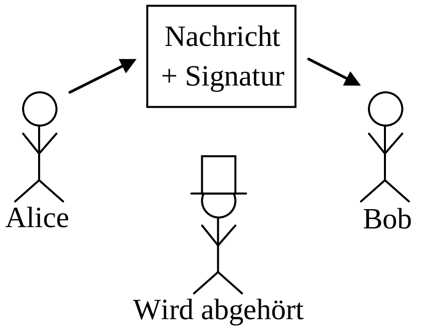
=> Menge ist normal, wenn sie sich nicht selbst als Element enthält

Frage: Ist die Menge, aller normalen Mengen, auch normal?

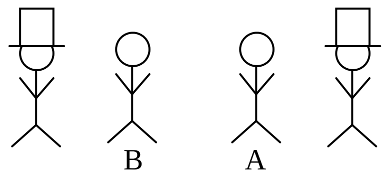
$R = \{M \mid M \in M\}$

$\left.\begin{array}{l} 1.\ R \notin R \Rightarrow R \in R \\ 2.\ R \in R \Rightarrow R \notin R \end{array}\right\}$ Widerspruch

Ein kurzer Überblick über Zahlenmengen, Begriff der Primzahl



Später:



Wer hat die Nachricht gesendet?

Nur Alice soll sich als autorisierte „Besitzerin“ der Signatur ausweisen können.

Das „Geheimnis“ der Signatur darf von niemandem aufgedeckt werden → Lösung Primzahlen!

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{R}$ = Reele Zahlen
$\mathbb{C}$ = Komplexe Zahlen

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Satz: $\sqrt{2}$ ist <u>kein Bruch</u>, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Beweis: Indirekt. Nehmen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ an; zeigen das ein Widerspruch folgt, d.h. das die Annahme falsch sein muss.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (gekürzt)
$\sqrt{2} * q = p \rightarrow (2q^2 = p^2)* \rightarrow p^2$ gerade $\rightarrow$ p gerade $\rightarrow p = 2p' \rightarrow p^2 = 2p'^2$
In (*) eingesetzt:
$2q^2 = 4p'^2 \rightarrow q^2 = 2p'^2 \rightarrow q^2$ gerade $\rightarrow$ q gerade $\rightarrow q = 2q' \rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} \rightarrow$ Widerspruch $\frac{p}{q}$ war gekürzt!
Hilfssatz: n^2 gerade $\rightarrow$ n gerade

Beweis: (n^2 gerade => n gerade) ≡ (n ungerade => n^2 ungerade)

Sei n ungerade, d.h. $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n^2 = (2k - 1) = 4k^2 - 4k + 1 = \underbrace{\underbrace{2 * (2k^2 - 2k)}_{\text{gerade}} + 1}_{\text{ungerade}}$

Anmerkung: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrationale Zahlen; z.B. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \ldots$

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ Dezimalzahl}\}$

x
- abbrechen, $x \in \mathbb{Q}$
- nicht abbrechen
  - periodisch, $x \in \mathbb{Q}$
  - nicht periodisch, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$