Mengenlehre
Grundlegende Begriffe und Rechenregeln

Beispiel: Datenbank mit THM-Studenten; daraus Liste

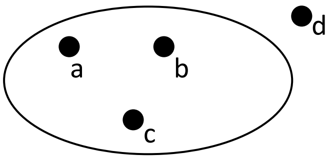
- Alle die Informatik im 1. Semester studieren
- Alle die Bio-Informatik studieren (jedes Semester)
- Namen mit den Buchstaben A bis K

Dabei:

1. <u>Keine</u> Mehrfachnennung
2. Reihenfolge (Name, Matrikelnummer, …) <u>egal</u>

Konzept: Menge

Menge: Zusammenfassung von einander verschiedener <u>Elemente</u>. Ohne Reihenfolge.



$M = \{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \dots$

$a \in M$ → a ist Element von M

$d \notin M$ → d ist nicht Element von M

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ ganze Zahlen

$-5 \in \mathbb{Z}$, $-5 \notin \mathbb{N}$

Beschreibende Darstellung:

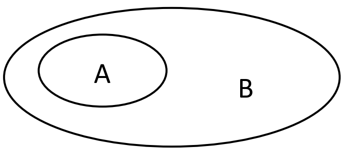
$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$
$M = \{x \in G \mid P(x)\}$

Prädikat
Grundmenge

Definition: (Grundbegriffe)

→ Siehe Skript

(Echte) Teilmenge:



$A \subseteq B$

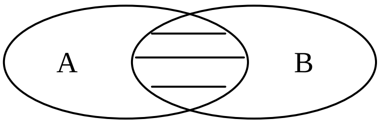
Hier sogar: $A \subset B$

$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$, $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$
$\{b\} \subseteq \{a, b, c\}$, $\{b\} \subset \{a, b, c\}$
$\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$
$\{a, b, c\} \subseteq \{c, a, b\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\{1\} \subset \mathbb{N}$
$\mathbb{N} \not\subset \mathbb{N}$

$\emptyset$ leere Menge, enthält <u>kein</u> Element
$\emptyset = \{\}$
Festlegung: $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M

<u>Durchschnitt</u>:

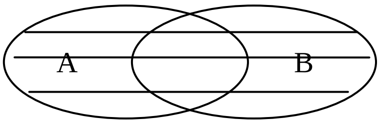


$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$

$\{a, b, c\} \cap \{c, d\} = \{c\}$

$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$

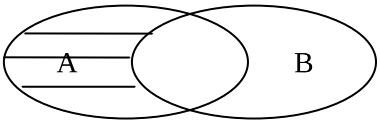
<u>Vereinigung</u>:



$A \cup B$

$\{a, b, c\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$ → c kommt nur einmal vor in der vereinigten Menge

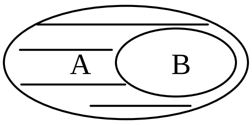
<u>Differenz</u>:



$A \setminus B$

$\{a, b, c\} \setminus \{a, c\} = \{b\}$

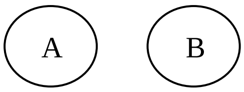
<u>Komplement</u>:



$A \setminus B$ wenn $B \subseteq C$

$C_A(B)$, $\overline{B}_A$

<u>Disjunkt</u>:



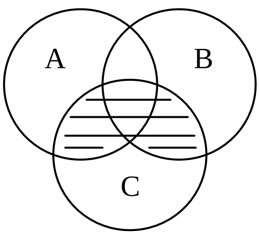
$A \cap B = \emptyset$

Potenzmenge P(M)
Menge aller Teilmengen von M

$P(\{a, b\}) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$

Beispiel: THM-Datenbank (s.o.)

- A = {Alle Inf., 1. Sem.}
- B = {Bio-Inf.}
- C = {… A bis K …}



$M = (A \cup B) \cap C$

$M = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Satz: Umformungsregeln

1. Kommutativität
   a. $A \cap B = B \cap A$
   b. $A \cup B = B \cup A$
2. Assoziativität
   a. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   b. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. Distributivität
   a. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   b. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. Regeln von de Morgan
   a. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   b. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Beweis: Mit Regeln der Aussagenlogik

Zu 2.:

$(A \cap B) \cap C$

$= \{x \mid ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \in C)\}$

$= \{x \mid (x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \in C))\}$

$= A \cap (B \cap C)$

Zu 4.:

$\neg(x \in (A \cap B)) = \neg(x \in A \wedge x \in B) = \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$

Anmerkung: Schreibweise (wegen Assoziativität keine Klammern)

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A;$

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A;$