Gegeben sei eine Formel der Aussagenlogik

$(A \wedge B) \rightarrow C$

Ersetzen der Aussagen durch Prädikate

$(P(x, y) \wedge B) \rightarrow Q(x, y, z)$

Ist Formel der Prädikatenlogik

**Anmerkung:** Es gibt in der Prädikatenlogik noch allgemeiner gebaute Formeln, z.B. mit Quantoren

**Quantoren**

Sei P(x) Prädikat.

1. Die Aussage: „P(x) ist wahr für alle x aus der Grundmenge" wird $\forall x P(x)$ geschrieben. $\forall$ heißt Allquantor
2. Die Aussage: „Es existiert (mindestens) ein x aus der Grundmenge, sodass P(x) wahr ist." wird $\exists x P(x)$ geschrieben. $\exists$ heißt Existenzquantor

Beispiel: Studenten im Hörsaal sind Grundmenge

| P(x) | $\forall x P(x)$ | $\exists x P(x)$ |
|---|---|---|
| x besucht die DM-Vorlesung | w | w |
| x ist im Oktober geboren | f | w |
| x ist nach 2000 geboren | f | f |

Beispiel: Grundmenge → Reelle Zahlen

- Wahr: $\forall x[x^2 \geq 0]$, $\exists x[x^2 \geq 0]$, $\exists x[x^2 \leq 0]$
- Falsch: $\forall x[x^2 \leq 0]$, $\exists x[x^2 < 0]$
- Wahr: $\exists x \exists y[x < y]$, $\forall x \exists y[x < y]$
- Falsch: $\forall x \forall y[x < y]$, $\exists x \forall y[x < y]$

Beispiel: $\exists x \forall y[x \leq y]$

- Falsch: Für reelle Zahlen
- Wahr: Für natürliche Zahlen (mit x = 1)
- Wahr: Für nicht negative reelle Zahlen (mit x = 0)

Endliche Grundmenge M z.B. M = {a, b, c}

$\forall x P(x) \equiv (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$

$\exists x P(x) \equiv (P(a) \vee P(b) \vee P(c))$

Beispiel: M = {a, b, c} Messwerte von Temperatursensoren (in °C)

WENN ($\forall x[x > 21]$)
DANN Klimaanlage einschalten

Gleichwertig:

WENN $((a > 21) \wedge (b > 21) \wedge (c > 21))$
DANN …

Hier: M abhängig von der Zeit.

Negation von Quantoren

$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

Beispiel: $M = \{a, b, c\}$ nach de Morgan

$\neg\forall x P(x) \equiv \neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \equiv \exists x \neg P(x)$

$\neg\exists x P(x) \equiv \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(c)) \equiv (\neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c)) \equiv \forall x \neg P(x)$

Reihenfolge wichtig!

Grundmenge natürliche Zahlen

$\forall x \exists y [y > x]$ ist wahr

$\exists y \forall x [y > x]$ ist falsch

Gebundene / freie Variablen

Aussagen: $\forall x P(x)$, $\exists x P(x)$, $\forall x \exists y P(x, y)$, $\forall x \forall y P(x, y)$

Keine Aussagen: $\forall x P(x, y)$

Freie Variable

Gebundene Variable

Beispiel: Grundmenge sei $\mathbb{N}$ natürliche Zahlen
Bedeutung?

$\forall q \exists p \forall x,y [p < q \wedge (x, y > 1 \rightarrow xy \neq p)]$