

Gegeben sei eine Formel der Aussagenlogik

$$(A \wedge B) \rightarrow C$$

Ersetzen der Aussagen durch Prädikate

$$(P(x, y) \wedge B) \rightarrow Q(x, y, z)$$

Ist Formel der Prädikatenlogik

**Anmerkung:** Es gibt in der Prädikatenlogik noch allgemeiner gebaute Formeln, z.B. mit Quantoren

### Quantoren

Sei  $P(x)$  Prädikat.

1. Die Aussage: „ $P(x)$  ist wahr für alle  $x$  aus der Grundmenge“ wird  $\forall x P(x)$  geschrieben.  $\forall$  heißt Allquantor
2. Die Aussage: „Es existiert (mindestens) ein  $x$  aus der Grundmenge, sodass  $P(x)$  wahr ist.“ wird  $\exists x P(x)$  geschrieben.  $\exists$  heißt Existenzquantor

Beispiel: Studenten im Hörsaal sind Grundmenge

$P(x)$	$\forall x P(x)$	$\exists x P(x)$
$x$ besucht die DM-Vorlesung	w	w
$x$ ist im Oktober geboren	f	w
$x$ ist nach 2000 geboren	f	f

Beispiel: Grundmenge  $\rightarrow$  Reelle Zahlen

- Wahr:  $\forall x [x^2 \geq 0]$ ,  $\exists x [x^2 \geq 0]$ ,  $\exists x [x^2 \leq 0]$
- Falsch:  $\forall x [x^2 \leq 0]$ ,  $\exists x [x^2 < 0]$
- Wahr:  $\exists x \exists y [x < y]$ ,  $\forall x \exists y [x < y]$
- Falsch:  $\forall x \forall y [x < y]$ ,  $\exists x \forall y [x < y]$

Beispiel:  $\exists x \forall y [x \leq y]$

- Falsch: Für reelle Zahlen
- Wahr: Für natürliche Zahlen (mit  $x = 1$ )
- Wahr: Für nicht negative reelle Zahlen (mit  $x = 0$ )

Endliche Grundmenge  $M$  z.B.  $M = \{a, b, c\}$

$$\forall x P(x) \equiv (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$$

$$\exists x P(x) \equiv (P(a) \vee P(b) \vee P(c))$$

Beispiel:  $M = \{a, b, c\}$  Messwerte von Temperatursensoren (in °C)

WENN ( $\forall x [x > 21]$ )

DANN Klimaanlage einschalten

Gleichwertig:

WENN ( $(a > 21) \wedge (b > 21) \wedge (c > 21)$ )

DANN ...

Hier:  $M$  abhängig von der Zeit.

## Negation von Quantoren

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

Beispiel:  $M = \{a, b, c\}$  nach de Morgan

$$\neg \forall x P(x) \equiv \neg (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \equiv \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \neg (P(a) \vee P(b) \vee P(c)) \equiv (\neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c)) \equiv \forall x \neg P(x)$$

Reihenfolge wichtig!

Grundmenge natürliche Zahlen

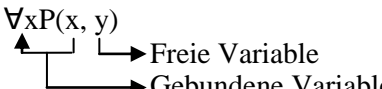
$\forall x \exists y [y > x]$  ist wahr

$\exists y \forall x [y > x]$  ist falsch

Gebundene / freie Variablen

Aussagen:  $\forall x P(x), \exists x P(x), \forall x \exists y P(x, y), \forall x \forall y P(x, y)$

Keine Aussagen:  $\forall x P(x, y)$



Beispiel: Grundmenge sei  $\mathbb{N}$  natürliche Zahlen

Bedeutung?

$$\forall q \exists p \forall x, y [p < q \wedge (x, y > 1 \rightarrow xy \neq p)]$$