Problemstellung: Wahrheitstafel gegeben
Passende Formel gesucht $\phi = ?$

	x	y	z	ϕ	$\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$	$\overline{x} \wedge y \wedge z$	$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$	$x \vee y \vee \overline{z}$	$x \vee \overline{y} \vee z$
a)	0	0	0	1	1	0	0	1	1
b)	0	0	1	0	0	0	0	0	1
c)	0	1	0	0	0	0	0	1	1
d)	0	1	1	1	0	1	0	1	1
e)	1	0	0	1	0	0	1	1	1
f)	1	0	1	0	0	0	0	1	0
g)	1	1	0	0	0	0	0	1	1
h)	1	1	1	0	0	0	0	1	1

Hilfe

1. Weg: Zeilen mit $\phi = 1$
   a) $\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$
   d) $\overline{x} \wedge y \wedge z$
   e) $x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$

Jede Formel ist <u>nur in der betreffenden Zeile</u> gleich 1

$\phi = (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$ → Disjunktive Normalform (DNF) von ϕ

2. Weg: Zeilen mit $\phi = 0$
   b) $x \vee y \vee \overline{z}$
   c) $x \vee \overline{y} \vee z$
   f) $\overline{x} \vee y \vee z$
   g) $\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$
   h) $\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$

Jede Formel ist <u>nur in der betreffenden Zeile</u> gleich 0

$\phi = (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$ → Konjunktive Normalform (KNF) von ϕ

Literale: Variablen, negiert Variablen, d.h. x, y, …, $\overline{x}$, $\overline{y}$,…

Klausel: Oder-Verknüpfung von Literalen, z.B. $(x \vee y \vee \overline{z})$

KNF: Und-Verknüpfung von Klauseln

Satz: Zu jedem ϕ gibt es eine KNF und DNF

Beweis: KNF/DNF wie oben konstruieren

Folgerung: Kommen ohne „↔“ und „→“ aus.

Besser: Jedes ϕ kann logisch äquivalent mit nur einem Booleschen-Operator geschrieben werden. Geht mit NAND oder auch mit NOR.

Beweis: ÜB 1 – Aufg. 2 / ÜB 2 – Aufg. 2

Weitere Boolesche Operatoren:

- XOR $\oplus$ ausschließendes Oder
- NAND | „not-and“, Sheffer-Operator
- NOR ↓ „not-or“, Peirce-Operator

A	B	$A \oplus B$	$A \mid B$	$A \downarrow B$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0

3. Prädikate, Quantoren

Beispiel: Schleife in einem Programm

for(i = 4; $\underbrace{\text{i < 4}}_{\text{Aussage?}}$; i++)

1 < 4 Aussage, w
2 < 4 Aussage, w
3 < 4 Aussage, w
4 < 4 Aussage, f

i < 4 weder wahr noch falsch d.h. keine Aussage!

i < 4: Prädikat: Wird zu einer Aussage (w oder f), wenn für i ein Wert eingesetzt wird.

Für i erlaubt: Z.B. ganze Zahlen; Grundmenge

Beispiel:

Prädikat P(x)	Grundmenge	w	f
$x^2 \geq 5$	Natürliche Zahlen	P(3), …	P(1), P(2)
$x^2 \geq 5$	Reele Zahlen	P($\sqrt{5}$), P(3)	P(1), P(1,234)
x mag Lasagne	Zeichenketten	P(Garfield)	P(robocat)

n-Variablen: n-stelliges Prädikat

Beispiel: P(x, y) sei „x teilt y“

Grundmenge: Natürliche Zahlen

Wahr: P(2, 8), P(5, 5)

Falsch: P(5, 7), P(7, 5), P(8, 2)

Beispiel: $x^2 + y^2 = z^2$

Dreistelliges Prädikat: P(x, y, z)