O-Notation: f, g: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Ordnung

Schreiben f(n) = O(g(n)), wenn Konstanten k, n_0 > existieren, sodass für alle $n \geq n_0$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt:

$f(n) \leq k * g(n)$

Laufzeit eines Algorithmus

Anzahl Elementarschritte f(n) abhängig von der Größe n der Eingabe.

Abschätzung (Worst-Case) nach oben z.B. durch $f(n) = O(n * \log(n))$

Wichtig: Für g(n) Polynom? Oder nur Exponentialfunktion?

Vollständige Induktion (Prinzip und Beispiele)

Beispiel:

Aussagen:	A(1) 1	= 1	= 1^2	usw.
	A(2) 1 + 3	= 4	= 2^2	
	A(3) 1 + 3 + 5	= 9	= 3^2	
	A(4) 1 + 3 + 5 + 7	= 16	= 4^2	

Vermutung: $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2}_{A(n)}$

Wie können wir unendlich viele Aussagen A(1), A(2), … beweisen?

=> Vollständige Induktion

1. Induktionsbasis: Beweis von A(1)

2. Induktionsschritt: Beweis von A(k) => A(k+1)

Aus 1 und 2 folgt die Gültigkeit A(n) für $n \in \mathbb{N}$

Anmerkung:

- In 2 ist k beliebig aus $\mathbb{N}$
- A(k) heißt Induktionsvoraussetzung

Beispiel: Zu zeigen ist $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis mit vollständiger Induktion.

1. Induktionsbasis

Zu zeigen: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1^2$ A(1)

Beweis: $2 * 1 - 1 = 1$ $1^2 = 1$ ✓

2. Induktionsschritt

Zu zeigen: $\underbrace{\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2}_{\substack{A(k)\\ \text{Induktionsvoraussetzung}}}$ => $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = (k+1)^2$

Beweis:

$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = (k+1)^2$ | + [$2*(k+1)-1$]

=> $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)$ $= k^2 + 2*(k+1) - 1$
$= k^2 + 2k + 2 - 1$
$= k^2 + 2k + 1$
$= (k+1)^2$

Beispiel: 6 | $(n + 3n^2 + 2n^3)$ für alle n ∈ ℕ
„teilt“

Beweis mit vollständiger Induktion

1. Induktionsbasis

Zu zeigen (Z.z.): 6 | $(1 + 3 * 1^2 + 2 * 1^3)$ A(1)

Beweis: 1 + 3 + 2 = 6

6 | 6 ✓

2. Induktionsschritt

Zu zeigen: 6 | $(n + 3n^2 + 2n^3)$ => 6 | $(k + 1 + 3*(k+1)^2 + 2*(k+1)^3)$

Beweis: $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$
$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

Damit folgt: $k + 1 + 3*(k+1)^2 + 2*(k+1)^3$
$= k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2$
$= \underbrace{k + 3k^2 + 2k^3}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} + \underbrace{6 + 12k + 6k^2}_{\text{Teilbar durch 6 (könnte man ausklammern)}}$

Beispiel: Sei M endliche Menge mit $|M| = n$ (n ∈ $\mathbb{N}_0$)

Behauptung: Die Anzahl der Teilmengen ist $2^{|M|}$, das heißt $|P(M)| = 2^{|M|}$

Beweis mit vollständiger Induktion nach $n = |M|$

1. Induktionsbasis

Zu zeigen: Für M mit $|M| = 0$ ist $|P(M)| = 2^0$ A(0)

Beweis: M = ∅, P(M) = {∅} => $|P(M)| = 1 = 2^0$