$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=2$

$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$

Satz: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $|q|<1$

Beweis: $s_m = 1+q+q^2+\cdots+q^m$
$q * s_m = q+q^2+\cdots+q^m+q^{m+1}$ | -

$= s_m - q * s_m = 1-q^{m+1} \Rightarrow s_m(1-q) = 1-q^{m+1}$

$\Rightarrow s_m = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$

$\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$ für q beliebig ($q \neq 1$)

$|q|<1 : q^{m+1} \to 0 \ (m \to \infty)$

=> Satz

Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Konvergente nicht-geometrische Reihe z.B.

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$

Grenzwert: e

Allgemeiner:

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

Sehr schnelle Konvergenz

Programmierung von e^x (Taschenrechner, Softwarepakete)

Abbruch der Reihe, wenn die Genauigkeit ausreicht.

Einige elementare Funktionen

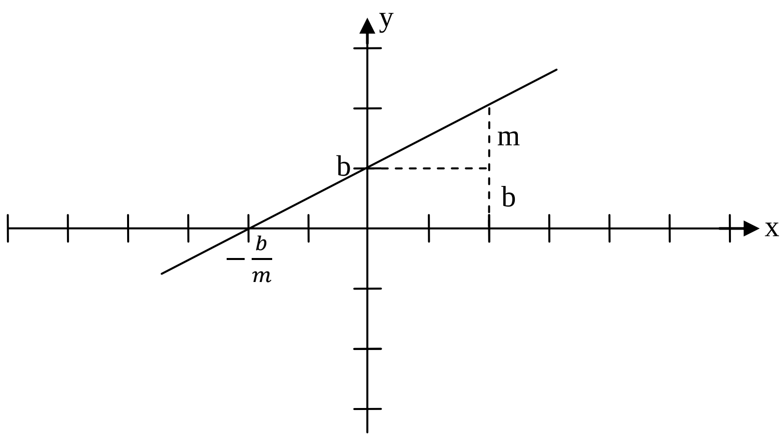
Beispiel: Im Zusammenhang mit Algorithmen hören Sie z.B. „… Sortieren von n Datensätzen. Laufzeit des Algorithmus MERGE-SORT ist von der Ordnung O(n*log(n)).“

(Polynomiale / exponentielle Laufzeiten…)

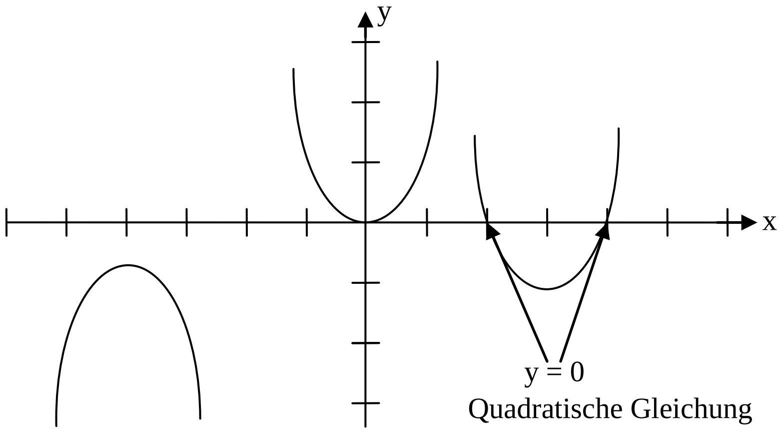
Was bedeutet das?

Polynome: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ (Grad n; Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$)

z.B.: Grade => $y = a_0 + a_1x$ oder $y = mx + b$



z.B.: Parabel $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$



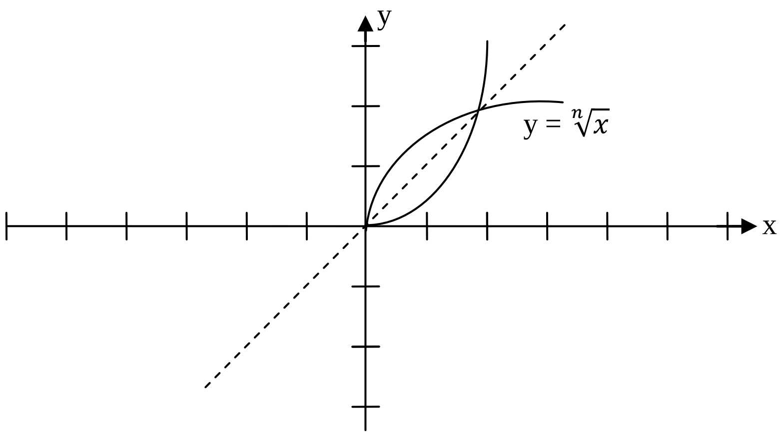
Potenzfunktionen: $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$

$$\left.\begin{aligned} \text{z.B. } y &= x^{-1} = \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ y &= x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, x \geq 0 \end{aligned}\right\} x > 0$$

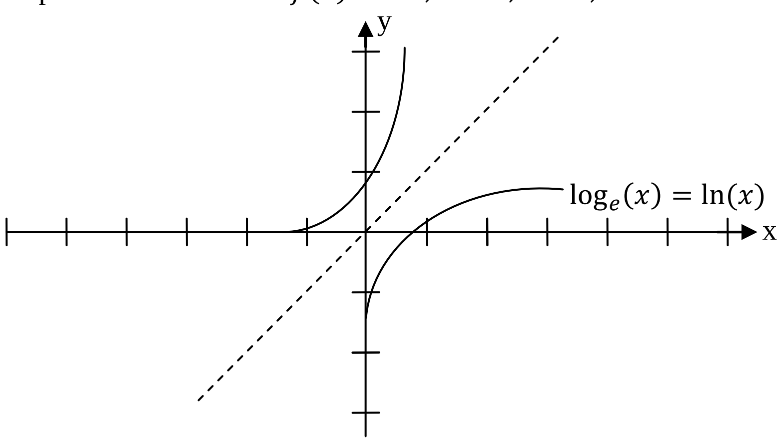
$$y = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \begin{cases} \dfrac{1}{(x^{\frac{1}{2}})^3} = \dfrac{1}{(\sqrt{x})^3} \\ \dfrac{1}{(x^3)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} \end{cases}, x > 0$$

Wurzelfunktionen: $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}, x \geq 0$

Umkehrfunktion zu $y = x^n$



Exponentialfunktionen: $f(x) = b^x, x \in \mathbb{R}, b > 0, b \neq 1$



Logarithmusfunktionen: $f(x) = \log_b x \ , x > 0, b > 0, b \neq 1$

Umkehrfuntkion zu y = b^x

Rechenregeln, Beispiel:

$7^2 * 7^3 = (7 * 7) * (7 * 7 * 7) = 7^5$

$7^a * 7^b = 7^{a+b}$

$e^a * e^b = e^{a+b}$

Zu x_1, $x_2 > 0$ existiert eindeutig a mit $x_1 = e^a$, b mit $x_2 = e^b$

$(W(e^x) = \mathbb{R}^{>0} \ , y = e^x \ umkehrbar)$

$\ln(x_1 * x_2) = \ln(e^a * e^b) = \ln\left(e^{a+b}\right) = a + b = \ln(e^a) + \ln(e^b) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$