Beispiel: Geometrische Folge

$(5 * 3^n)_{n=0}^{\infty} = (5, 15, 45, 135, \ldots)$

$(a_0 * q^n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_0 q, a_0 q^2, \ldots)$

$a_{i+1} / a_i = q$, Quotient konstant

Gleicher prozentualer Zuwachs um p%

$a_{i+1} = a_i + a_i * \frac{p}{100} = a_i * (1 + \frac{p}{100})$

Wenn z.B. $a_1 = 24$, $a_3 = 54$, dann $54 = a_3 = a_2 * q = a_1 * q * q = 24 * q^2$,

also $q = \sqrt{\frac{54}{24}} = \sqrt{\frac{27}{12}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ das heißt Zuwachs um 50% → $a_2 = 36$, $a_4 = 81$

und $a_0 * \frac{3}{2} = a_1 = 24 \Rightarrow a_0 = 16$

Folgen können <u>rekursiv</u> definiert werden.

Beispiel: Potenz $a_n = b^n$ → $a_0 = 1$, $a_i = b * a_{i-1}$ ($i \in \mathbb{N}$)

$i = 2$, $a_2 = b * a_1$, $a_1 = b * a_0$, $a_0 = 1$

Beispiel: Fakultät $a_n = n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$ ($n \in \mathbb{N}$) und $a_0 = 0! = 1$

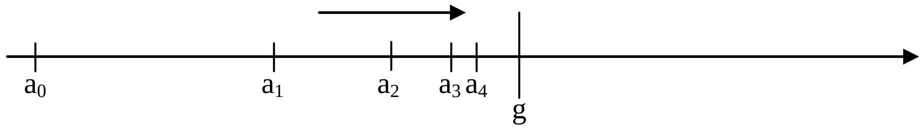
$a_0 = 1$, $a_i = i * a_{i-1}$ ($i \in \mathbb{N}$)

$i = 3$: $a_3 = 3 * a_2$ → $a_2 = 2 * a_1$ → $a_1 = 1 * a_0$ → $a_0 = 1$ → $a_3 = 3 * 2 * 1$

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{i+1} = a_i + a_{i-1}$ ($i \in \mathbb{N}$) → 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

Folge (a_n) <u>konvergent</u>: a_n „immer dichter“ an Grenzwert g, wenn n „immer größer“ wird.



$a_n \to g \ (n \to \infty)$, $\lim_{n \to \infty} a_n = g$

Beispiel: $\frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$, $1 + \frac{1}{n} \to 1 \ (n \to \infty)$

Beispiel: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ konvergent

Grenzwert wird mit e bezeichnet → e = 2,71…

Schreibweise für Summen: $\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k$

Beispiel: Laufzeitberechnung

Algorithmus mit Schleife bei k Durchläufen

Laufzeit $= \sum_{n=1}^{k} (Zeit\ für\ Durchlauf\ n)$

Satz: Gaußsche Summenformel

$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k*(k+1)}{2}$

Beispiel: k = 100

1 + 2 + 3 + 4 + … + 98 + 99 + 100 = 50 $*$ 101 = 5050

101

101

Beweis: 1 + 2 + 3 + … + k-1 + k → k + k-1 + k-2 + … + 2 + 1 → k+1 + k+1 + k+1 + … + k+1 + k+1

$2 * \sum_{n=1}^{k} a_n = k * (k+1)$ | :2 => Satz

„Unendliche“ Summe: Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

Reihenglieder

Partialsumme: $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$

Wenn $s_m \to s$ ($m \to \infty$) dann Reihe konvergent: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

Beispiel: Harmonische Reihe

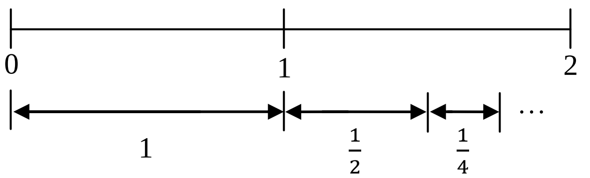
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent (<u>nicht</u> konvergent)

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{> \frac{1}{2}} + \cdots$$

s_m wird beliebig groß; $s_m \to \infty$ ($m \to \infty$)

Beispiel: Geometrische Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$



= … + „die Hälfte vom Rest“ + … → Grenzwert s = 2