Beispiel: $x = 1{,}23 = 1{,}23 * \frac{100}{100} = \frac{123}{100}$

$x = 5{,}1\overline{23} = 5{,}1232323 \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} 1000 * x = 5123,\overline{23} \\ 10 * x = 51,\overline{23} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 990 * x = 5072 \\ x \qquad = \frac{5072}{990} \in \mathbb{Q} \end{array}$$

Problem: $x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung

Idee: Neue „Zahl“ i (imaginäre Einheit) mit $i^2 = -1$
Rechnen mit i „wie im Reellen“. Bilden: $2i, \frac{5}{2}i, -\frac{7}{3}i, 2 + i, 5 + 3i, 7 - \frac{3}{2}i, \ldots$
Komplexe Zahl: $z = a + bi$ mit $a,b \in \mathbb{R}$

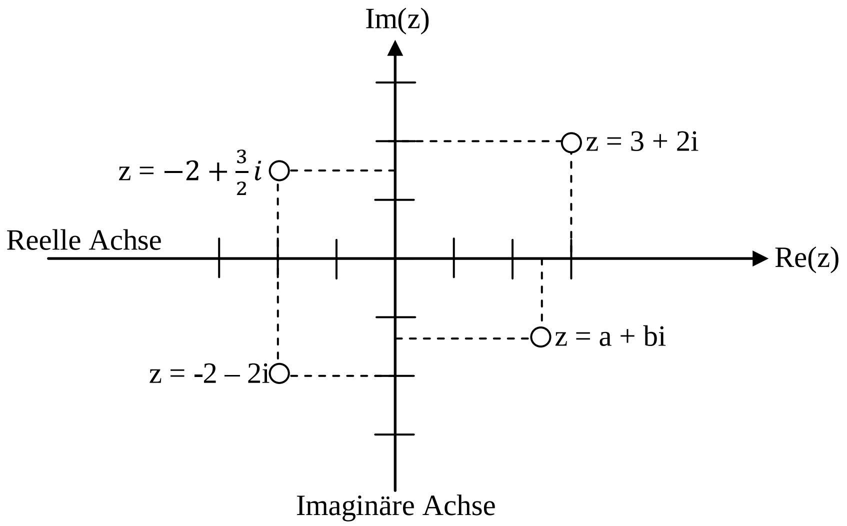
$a = \mathrm{Re}(z)$ Realteil

$b = \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil

(bi mit $b \neq 0$ rein imaginäre Zahl)

$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi;\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Komplexe Ebene:



Addition: $(5 + 2i) + (3 + 4i) = 8 + 6i$

Subtraktion: $(5 + 2i) - (3 + 4i) = 2 - 2i$

Multiplikation: $(5 + 2i) * (3 + 4i) = 15 + 20i + 6i + 8i^2 = 15 - 8 + 26i = 7 + 26i$

Division: $\frac{5+2i}{3+4i} = \frac{(5+2i)*(3-4i)}{(3+4i)*(3-4i)} = \frac{15-20i+6i-8i^2}{3^2-(4i)^2} = \frac{15+8-14i}{9-16i^2} = \frac{23-14i}{25} = \frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$

Division: Erweitern mit geändertem Nenner; Vorzeichen beim Imaginärteil geändert.

$i^3 = i^2 * i = -i$
$i^4 = i^2 * i^2 = (-1) * (-1) = 1$
$i^5 = i^4 * i = i$

Primzahl: n ganz, $n > 1$ und nur durch 1 und sich selbst teilbar

$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

Sieb des Eratosthenes

---	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50

1. 2 = P → Man beginnt mit der 2 und streicht alle Zahlen die durch 2 Teilbar sind raus
2. 3 = P → Man streicht alle Zahlen die durch 3 teilbar sind raus
3. 4 ≠ P → Ignorieren
4. 5 = P → Man streicht alle Zahlen die durch 5 teilbar sind raus
5. 6 ≠ P → Ignorieren

Auf diesem Weg erhält man für eine beliebige Anzahl Zahlen die Primzahlen heraus.

Satz: Jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist ein Produkt aus Primzahlen.

Beweis:

1. $n \in P$, fertig
2. $n \notin P \Rightarrow n = a * b$ mit $1 < a, b < n$

Weiter a, b zerlegen. Nach endlich vielen Schritten fertig.

Primfaktorzerlegung:

2 = 2	7 = 7	12 = 2 * 2 * 3	17 = 17
3 = 3	8 = 2 * 2 * 2	13 = 13	18 = 2 * 3 * 3
4 = 2 * 2	9 = 3 * 3	14 = 2 * 7	19 = 19
5 = 5	10 = 2 * 5	15 = 3 * 5	20 = 2 * 2 * 5
6 = 2 * 3	11 = 11	16 = 2 * 2 * 2 * 2	

Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen

Beweis: Angenommen, es gibt nur 2, 3, 5, …, P ← letzte

Die Primfaktorzerlegung von: $2 * 3 * 5 * \ldots * p + 1$ kann nicht 2, 3, …, p enthalten; das können also nicht alle Primzahlen sein. Widerspruch!

Satz: Die Primfaktorzerlegung ist <u>eindeutig</u>. (ohne Beweis)

Anwendung: Alice / Bob (s.o.)

Alice wählt große Primzahl p, q (je 200 Stellen, ca.), bildet Signatur $n = p * q$

- Multiplikation: leicht
- Faktorisierung: schwierig

Spion kennt n. Kann aber nicht p und q bestimmen. (n hat 400 Stellen; Faktorisierung dauert millionen Jahre). <u>Nur</u> Alice kann Bob die Zahlen p und q geben. Bob multipliziert und bekommt $p * q = n$. Passt!